Perelman.wiki

#042

Бесплатный обед

Десять молодых людей решили отпраздновать окончание средней школы обедом в ресторане. Официант пообещал, что если каждый день они будут приходить на обед в этот ресторан и рассаживаться по-новому, то когда все возможные вариации закончатся, обеды для них на всю оставшуюся жизнь станут бесплатными.

7. БЕСПЛАТНЫЙ ОБЕД.

I.

Десять молодых людей решили отпраздновать окончание средней школы товарищеским обедом в ресторане. Когда все собрались, и первое блюдо было подано,

Рис. 86. „— Сядьте за стол, как кому придется"..

заспорили о том, как усесться вокруг стола. Одни предлагали разместиться в алфавитном порядке, другие — по возрасту, третьи — по успеваемости, четвертые — по росту и т. д. Спор затянулся, суп успел простыть, а за стол никто не садился. Примирил всех официант, обратившийся к ним с такой речью:

— Молодые друзья мои, оставьте ваши пререкания. Сядьте за стол как кому придется и выслушайте меня.

Все сели как попало. Официант продолжал:

— Пусть один из вас запишет, в каком порядке вы сейчас сидите. Завтра вы снова явитесь сюда пообедать и разместитесь уже в ином порядке. Послезавтра сядете

121

7. БЕСПЛАТНЫЙ ОБЕД.

I.

Десять молодых людей решили отпраздновать окончание средней школы товарищеским обедом в ресторане. Когда все собрались, и первое блюдо было подано,

Рис. 86. „ — Сядьте за стол, как кому придется“...

заспорили о том, как усесться вокруг стола. Одни предлагали разместиться в алфавитном порядке, другие — по возрасту, третьи — по успеваемости, четвертые — по росту и т. д. Спор затянулся, суп успел простыть, а за стол никто не садился. Примирил всех официант, обратившийся к ним с такой речью:

— Молодые друзья мои, оставьте ваши пререкания. Сядьте за стол как кому придется и выслушайте меня.

Все сели как попало. Официант продолжал:

— Пусть один из вас запишет, в каком порядке вы сейчас сидите. Завтра вы снова явитесь сюда пообедать и разместитесь уже в ином порядке. Послезавтра сядете

Рис. 87. Не пришлось дождаться бесплатного обеда.

опять по-новому и т. д., пока не перепробуете всех возможных размещений. Когда же придет черед вновь сесть так, как сидите вы здесь сегодня, тогда — обещаю торжественно — я начну ежедневно угощать вас бесплатно самыми изысканными обедами.

Предложение понравилось. Решено было ежедневно собираться в этом ресторане и перепробовать все способы размещения за столом, чтобы скорее начать пользоваться бесплатными обедами.

Однако им не пришлось дождаться этого дня. И вовсе не потому, что официант не исполнил обещания, а потому что число всех возможных размещений за столом чересчур велико. Оно равняется ни мало, ни много — 3 628 800. Такое число дней составляет, как не трудно сосчитать, почти 10 000 лет!

II.

Вам, быть может, кажется невероятным, чтобы 10 человек могли размещаться таким большим числом различных способов. Проверьте расчет сами.

Раньше всего надо научиться определять число перестановок. Для простоты начнем вычисление с небольшого числа предметов — с трех. Назовем их *А*, *Б* и *В*.

Мы желаем узнать, сколькими способами возможно переставлять их один на место другого. Рассуждаем так. Если отложить пока в сторону вещь *В*, то остальные две можно разместить только двумя способами.

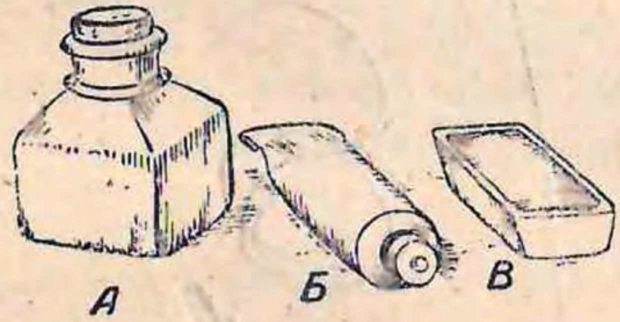

Рис. 88.

Теперь будем присоединять вещь *В* к каждой из этих пар. Мы можем сделать это трояко: можем

1) поместить *В* позади пары,
2) „ *В* впереди пары,
3) „ *В* между вещами пары.

Рис. 89. Две вещи можно разместить только двумя способами.

Других положений для вещи *В*, кроме этих трех, очевидно, быть не может. А так как у нас две пары, *АБ* и *БА*, то всех способов разместить вещи наберется

$$2 \times 3 = 6.$$

Способы эти показаны на рис. 90.

Пойдем дальше — сделаем расчет для 4 вещей. Пусть у нас 4 вещи: *А*, *Б*, *В* и *Г*. Опять отложим пока в сторону одну вещь, например *Г*; а с остальными тремя сделаем все возможные перестановки. Мы знаем уже, что число этих перестановок — 6. Сколькими же способами можно присоединить четвертую вещь Γ к каждой из 6 троек? Очевидно, четырьмя: можно

1) поместить Γ позади тройки;
2) „ Γ впереди тройки;
3) „ Γ между 1-й и 2-й вещью;
4) „ Γ между 2-й и 3-й вещью.

Всего получим, следовательно,

$$6 \times 4 = 24 \text{ перестановки;}$$

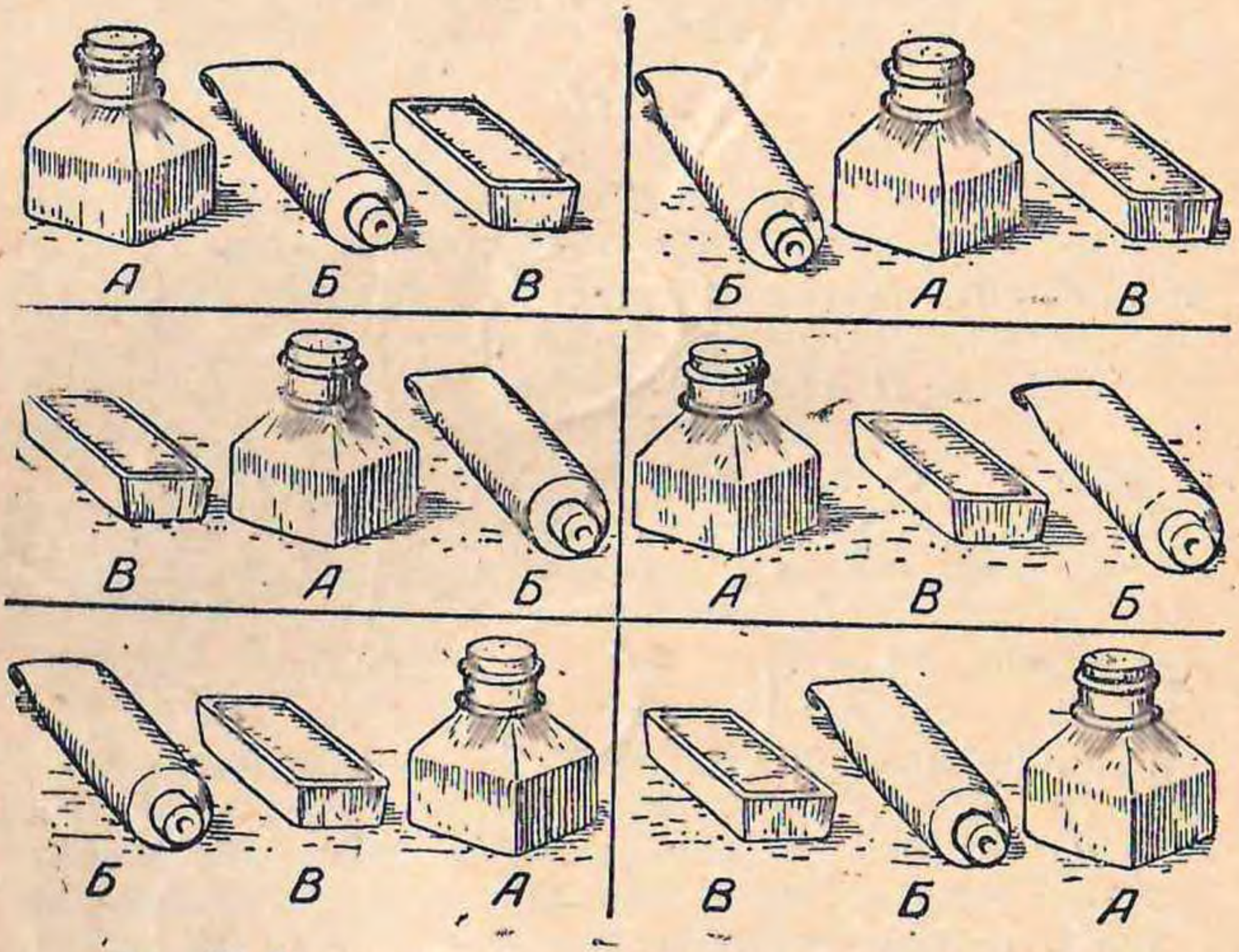

Рис. 90. Три вещи можно разместить шестью способами.

а так как $6 = 2 \times 3$, а $2 = 1 \times 2$, то число всех перестановок можно представить в виде произведения:

$$1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24.$$

Рассуждая таким же образом и в случае 5 предметов, узнаем, что для них число перестановок равно

$$1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120.$$

Для 6 предметов:

$$1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 = 720 \text{ и т. д.}$$

Обратимся теперь к случаю с 10 обедающими. Число возможных здесь перестановок определится, если дать себе труд вычислить произведение

$$1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 10.$$

Тогда и получится указанное выше число

$$3\,628\,800.$$

III.

Расчет был бы сложнее, если бы среди 10 обедающих было 5 девушек, и они желали бы сидеть за столом непременно так, чтобы чередоваться с юношами. Хотя число возможных перемещений здесь гораздо меньше, вычислить его несколько труднее.

Пусть сядет за стол — безразлично как — один из юношей. Остальные четверо могут разместиться, оставляя между собою пустые стулья для девушек, — $1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$ различными способами. Так как всех стульев 10, то первый юноша может сесть 10 способами; значит число всех возможных размещений для молодых людей $10 \times 24 = 240$.

Сколькими же способами могут сесть на пустые стулья между юношами 5 девушек? Очевидно $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$ способами. Сочетая каждое из 240 положений юношей с каждым из 120 положений девушек, получаем число всех возможных размещений:

$$240 \times 120 = 28\,800.$$

Число это во много раз меньше предыдущего и потребовало бы всего 79 лет (без малого). Доживи молодые посетители ресторана до столетнего возраста, они могли бы дождаться бесплатного обеда, если не от самого официанта, то от его наследников.

Умея подсчитывать перестановки, мы можем определить теперь, сколько различных расположений шашек возможно в коробке игры „в 15".[1] Другими словами, можем подсчитать число всех задач, какие способна предложить нам эта игра. Легко понять, что подсчет сводится к определению числа перестановок из 15 предметов. Мы знаем уже, что для этого нужно перемножить

$$1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \ldots \text{и т. д.} \ldots \times 14 \times 15.$$

Вычисление дает итог:

1 307 674 365 000.

т. е. больше биллиона.

Из этого огромного числа задач половина неразрешима. Существует, значит, свыше 600 миллиардов неразрешимых положений в этой игре. Отсюда понятна отчасти та эпидемия увлечения игрой „в 15", которая охватила людей, не подозревавших о существовании такого огромного числа неразрешимых случаев.

Заметим еще, что если бы мыслимо было ежесекундно давать шашкам новое положение, то, чтобы перепробовать все возможные расположения, потребовалось бы, при непрерывной работе круглые сутки, — свыше 40 000 лет.

Заканчивая нашу беседу о числе перестановок, решим такую задачу из школьной жизни.

В классе 25 учеников. Сколькими способами можно рассадить их по партам?

Путь решения этой задачи — для тех, кто усвоил себе все сказанное раньше — весьма не сложен: нужно перемножить 25 таких чисел:

$$1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times \ldots \times 23 \times 29 \times 25.$$

---

[1] При этом свободная клетка должна всегда оставаться в правом нижнем углу.

Математика указывает способы сокращать многие вычисления, — но облегчать выкладки, подобные сейчас приведенной, она не умеет. Не существует никакого иного способа выполнить **точно** это вычисление, как добросовестно перемножить все эти числа. Результат получается огромный, из 33 цифр — число, величину которого наше воображение не в силах себе представить.

Вот оно:

15 511 210 043 330 985 984 000 000.

Как прочесть это число? Оно произносится так:

15 квадрильонов
511 210 трильонов
43 330 биллионов
985 984 миллиона.

Рис. 91. Сколькими способами можно рассадить 25 учеников.

Из всех чисел, какие встречались нам до сих пор, — это, конечно, самое крупное, и ему больше всех прочих принадлежит право называться „числом-великаном“. Число мельчайших капель во всѐх океанах и морях земного шара скромно по сравнению с этим исполинским числом.